View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by eaKirNTU (Electronic archive Kirovograd National...

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРОЕКТУВАННЯ І ЕКСПЛУАТАЦІЇ МАШИН
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ ПО КРАТНИМ ТА КРИВОЛІНІЙНИМ ІНТЕГРАЛАМ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Методичні вказівки для студентів технічних спеціальностей

КРОПИВНИЦЬКИЙ
2017

Приклади розв'язання завдань по кратним та криволінійним інтегралам. Методичні вказівки для студентів технічних спеціальностей/ Укл.: В.І.Гуцул – Кропивницький: КНТУ, 2017. – 32 с.

Методичні вказівки містять приклади розв'язання задач з розділів „Кратні інтеграли”, „Криволінійні інтеграли”, курсу „Вища математика”. Призначені для студентів технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання.

Затверджено на засіданні
кафедри вищої
математики та фізики.
Протокол № 8 від 29.03.2017р.

© В.І.Гуцул, 2017

Завдання 1. Обчислити подвійний інтеграл двома способами: а) внутрішній інтеграл у двократному береться по змінній y, а зовнішній - по x; б) внутрішній інтеграл у двократному береться по змінній x, а зовнішній - по y.

Приклад 1. $\iint\limits_G (4xy-3y^2)dxdy;$ G: $y=x^2$, $y=-2x+8$, $y=0$.

Розв'язання. а) Будуємо спочатку область інтегрування, тобто область, яка обмежена заданими лініями (рис. 1). Знайдемо координати точки перетину прямої і параболи (координати точки M). Шукані координати є розв'язком системи

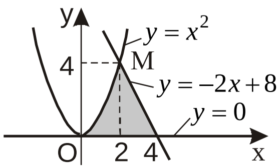


Рис. 1

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=-2x+8. \end{cases}$$

Прирівнявши праві частини, отримуємо квадратне рівняння $x^2+2x-8=0$. Нагадаємо, що корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ визначаються за формулами

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \quad D=b^2-4ac.$$

У нашому випадку $x_1=2, x_2=-4$. Очевидно, що абсцисою точки M є перший корінь. Підставивши $x=2$ в одне з рівнянь системи, дістаємо $y=4$.

У відповідності з умовою потрібно застосувати формулу

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Оскільки область інтегрування G обмежена зверху двома лініями, то розбиваємо її на дві частині вертикальною прямою, яка проходить через точку перетину *M*. Ліву частину позначимо через G_1, а праву – через G_2. Можемо записати

$$\iint\limits_{G}(4xy-3y^2)dxdy=\iint\limits_{G_1}(4xy-3y^2)dxdy+\iint\limits_{G_2}(4xy-3y^2)dxdy.$$

Обчислюємо спочатку інтеграл по G_1. Знизу і зверху вказану область відповідно обмежують вісь Ох (пряма $y=0$) і парабола $y=x^2$, отже внутрішній інтеграл береться від 0 до x^2. Найменше і найбільше значення величини *x* в області G_1 визначають межі інтегрування у зовнішньому інтегралі.

Переходимо до двократного інтеграла і розставляємо межі інтегрування:

$$\iint\limits_{G_1}(4xy-3y^2)dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{x^2}(4xy-3y^2)dy.$$

Обчислюємо внутрішній інтеграл (величина *x* вважається сталою):

$$\int\limits_0^{x^2}(4xy-3y^2)dy=(2xy^2-y^3)\Big|_0^{x^2}=2x\cdot x^4-x^6=2x^5-x^6.$$

Обчислюємо зовнішній інтеграл:

$$\int\limits_0^2(2x^5-x^6)dx=\left(2\cdot\frac{x^6}{6}-\frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^2=\frac{64}{21}.$$

Обчислюємо інтеграл по G_2:

$$\iint\limits_{G_2}(4xy-3y^2)dxdy=\int\limits_2^4 dx\int\limits_0^{-2x+8}(4xy-3y^2)dy;$$

© В.І.Гуцул

$$\int_0^{-2x+8}(4xy-3y^2)dy=(2xy^2-y^3)\Big|_0^{-2x+8}=2x(8-2x)^2-(8-2x)^3=$$

$$=128x-64x^2+8x^3-(8-2x)^3;$$

$$\int_2^4(128x-64x^2+8x^3-(8-2x)^3)dx=$$

$$=\left(64x^2-\frac{64}{3}\cdot x^3+2x^4+\frac{1}{2}\cdot\frac{(8-2x)^4}{4}\right)\Bigg|_2^4=$$

$$=1024-\frac{4096}{3}+512-\left(256-\frac{512}{3}+32+32\right)=\frac{64}{3}.$$

Можемо записати

$$\iint_G(4xy-3y^2)dxdy=\frac{64}{21}+\frac{64}{3}=\frac{512}{21}.$$

б) Застосовуємо формулу

$$\iint_G f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)dx.$$

Нижню і верхню межі інтегрування у внутрішньому інтегралі визначають лінії, які обмежують область G зліва і справа відповідно. Рівняння вказаних ліній необхідно представити у вигляді $x=\psi(y)$, тобто розв'язати їх відносно x. Межі інтегрування у зовнішньому інтегралі визначають найменше і найбільше значення величини y в області G.

Переходимо до двократного інтеграла і розставляємо межі інтегрування:

$$\iint_G (4xy-3y^2)dxdy = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{4-\frac{1}{2}y} (4xy-3y^2)dx\ .$$

Обчислюємо внутрішній інтеграл (величина y вважається сталою):

$$\int_{\sqrt{y}}^{4-\frac{1}{2}y} (4xy-3y^2)dx = (2yx^2-3y^2x)\Big|_{\sqrt{y}}^{4-\frac{1}{2}y} = 2y(4-\frac{1}{2}y)^2 - 3y^2(4-\frac{1}{2}y) -$$

$$-(2y\cdot y - 3y^2\sqrt{y}) = 2y^3 - 22y^2 + 32y + 3y^{5/2}\ .$$

Обчислюємо зовнішній інтеграл:

$$\int_0^4 (2y^3-22y^2+32y+3y^{5/2})dy = \left(\frac{1}{2}y^4 - \frac{22}{3}y^3 + 16y^2 + \frac{6}{7}y^{7/20}\right)\Bigg|_0^4 =$$

$$= 128 - \frac{22}{3}\cdot 64 + 16\cdot 16 + \frac{6}{7}\cdot 4^{7/2} = \frac{512}{21}\ .$$

Як бачимо, результати співпали.

Приклад 2. $\iint_G (2x^2y+x)dxdy$;   G: $y=\dfrac{3}{x}$, $y=3x$, $x=3$.

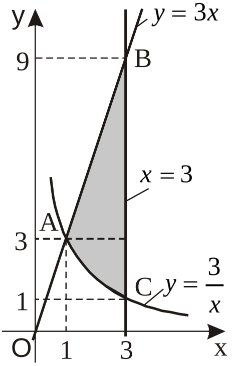


Рис. 2

Розв'язання. а) Будуємо область інтегрування G, (рис. 2). Для визначення координат точок перетину A, B, C складаємо відповідні системи:

$$\begin{cases} y=\dfrac{3}{x}, \\ y=3x; \end{cases} \quad \begin{cases} y=3x, \\ x=3; \end{cases} \quad \begin{cases} y=\dfrac{3}{x}, \\ x=3. \end{cases}$$

Розв'язавши їх, дістаємо: A(1;3), B(3;9), C(3;1).

Переходимо від подвійного до двократного інтеграла та розставляємо межі інтегрування:

© В.І.Гуцул

$$\iint\limits_G (2x^2y+x)dxdy=\int\limits_1^3 dx\int\limits_{3/x}^{3x}(2x^2y+x)dy\ .$$

Обчислюємо послідовно внутрішній та зовнішній інтеграли:

$$\int\limits_{3/x}^{3x}(2x^2y+x)dy=(x^2y^2+xy)\Big|_{\frac{3}{x}}^{3x}=9x^4+3x^2-12;$$

$$\int\limits_1^3(9x^4+3x^2-12)dx=\left(\frac{9}{5}x^5+x^3-12x\right)\Bigg|_1^3=$$

$$1{,}8\cdot 243+27-36-(1{,}8+1-12)=437{,}6\ .$$

б) Так як область G обмежена зліва двома лініями, то розбиваємо її на дві частині горизонтальною прямою, яка проходить через точку перетину А. Нижню частину позначимо через G_1, а верхню – через G_2. Можемо записати

$$\iint\limits_G (2x^2y+x)dxdy=\iint\limits_{G_1}(2x^2y+x)dxdy+\iint\limits_{G_2}(2x^2y+x)dxdy\ .$$

Обчислюємо послідовно інтеграли правої частини:

$$\iint\limits_{G_1}(2x^2y+x)dxdy=\int\limits_1^3 dy\int\limits_{3/y}^{3}(2x^2y+x)dx,$$

$$\int\limits_{3/y}^{3}(2x^2y+x)dx=\left(\frac{2}{3}yx^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{\frac{3}{y}}^{3}=\frac{2}{3}\cdot y\cdot 27+\frac{1}{2}\cdot 9-$$

$$-\left(\frac{2}{3}\cdot y\cdot\frac{27}{y^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{y^2}\right)=18y-\frac{45}{2y^2}+\frac{9}{2},$$

$$\int\limits_1^3\left(18y-\frac{45}{2y^2}+\frac{9}{2}\right)dy=\left(9y^2+\frac{45}{2y}+\frac{9}{2}y\right)\Bigg|_1^3=$$

© В.І.Гуцул

$$=9\cdot 9+\frac{45}{2\cdot 3}+\frac{9}{2}\cdot 3-\left(9+\frac{45}{2}+\frac{9}{2}\right)=66;$$

$$\iint\limits_{G_2}(2x^2y+x)dxdy=\int\limits_{3}^{9}dy\int\limits_{y/3}^{3}(2x^2y+x)dx,$$

$$\int\limits_{y/3}^{3}(2x^2y+x)dx=\left(\frac{2}{3}yx^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{\frac{y}{3}}^{3}=18y+\frac{9}{2}-\frac{2}{81}y^4-\frac{1}{18}y^2,$$

$$\int\limits_{3}^{9}\left(18y+\frac{9}{2}-\frac{2}{81}y^4-\frac{1}{18}y^2\right)dy=\left(9y^2+\frac{9}{2}y-\frac{2}{81\cdot 5}y^5-\frac{1}{18\cdot 3}y^3\right)\Bigg|_{3}^{9}=$$

$$=729+\frac{81}{2}-\frac{2}{9^2\cdot 5}\cdot 9^5-\frac{1}{6\cdot 9}\cdot 9^3-\left(81+\frac{27}{2}-\frac{2}{3^4\cdot 5}\cdot 3^5-\frac{1}{2\cdot 3^3}\cdot 3^3\right)=371{,}6.$$

У підсумку отримуємо

$$\iint\limits_{G}(2x^2y+x)dxdy=66+371{,}6=437{,}6.$$

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл, перейшовши до полярних координат.

Приклад 1. $\iint\limits_{G}\left(3\sqrt{x^2+y^2}+4\right)dxdy;\quad G: x^2+y^2\le 4,\ y\le 0.$

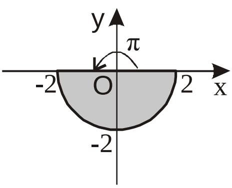


Рис. 3

Розв'язання. Будуємо лінії $x^2+y^2=4,\ y=0$ та визначаємо область інтегрування (рис. 3). Нагадаємо, що зв'язок між декартовими та полярними координатами задається співвідношеннями

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi.$$

Запишемо рівняння заданого кола в полярних координатах:

© В.І.Гуцул

$$(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=4,\quad \rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=4,\quad \rho=2.$$

До полярної системи координат у подвійному інтегралі переходимо за формулою

$$\iint_G f(x,y)dxdy=\iint_{G^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi.$$

З наведеного рисунка легко бачити, що $0\le\rho\le 2$, $\pi\le\varphi\le 2\pi$. Можемо записати:

$$\iint_G\left(3\sqrt{x^2+y^2}+4\right)dxdy=\iint_{G^*}\left(3\sqrt{(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2}+4\right)\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\iint_{G^*}(3\rho+4)\rho d\rho d\varphi=\int_{\pi}^{2\pi}d\varphi\int_0^2(3\rho+4)\rho d\rho.$$

Обчислюємо внутрішній інтеграл:

$$\int_0^2(3\rho+4)\rho d\rho=\int_0^2\left(3\rho^2+4\rho\right)d\rho=\left(\rho^3+2\rho^2\right)\Big|_0^2=8+8=16.$$

Обчислюємо зовнішній інтеграл:

$$\int_{\pi}^{2\pi}16d\varphi=16\varphi\Big|_{\pi}^{2\pi}=16\pi.$$

Приклад 2. $\iint_G(y\sqrt{x^2+y^2})dxdy;\quad G: y=\sqrt{3}x,\ y=-x,\ x=1.$

Розв'язання. Будуємо область інтегрування G (рис.4). Використовуючи залежності $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$ запишемо рівняння потрібної нам півпрямої $y=\sqrt{3}x$ в полярній системі координат:

$$\rho\sin\varphi=\sqrt{3}\rho\cos\varphi,\quad \mathrm{tg}\,\varphi=\sqrt{3},\quad \varphi=\pi/3.$$

Рівняння $y=-x,\ x=1$ в полярній системі координат відповідно приймають вигляд: $\varphi = -\pi/4$ (знак мінус обумовлений тем, що кут відкладається за рухом годинникової стрілки), $\rho = 1/\cos\varphi$.

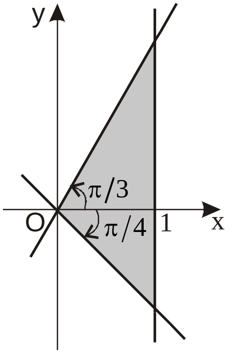


Рис. 4

Переходимо до полярної системи координат у подвійному інтегралі та розставляємо межі інтегрування:

$$\iint_G (y\sqrt{x^2+y^2})dxdy =$$

$$= \iint_{G^*} \rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \iint_{G^\div} \rho^3\sin\varphi d\rho d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{1/\cos\varphi} \rho^3 \sin\varphi d\rho.$$

Обчислюємо внутрішній та зовнішній інтеграли:

$$\int_0^{1/\cos\varphi} \rho^3\sin\varphi d\rho = \sin\varphi\cdot\frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^{1/\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{4\cos^4\varphi};$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin\varphi}{4\cos^4\varphi}d\varphi = -\frac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/3}\frac{d\cos\varphi}{\cos^4\varphi} = -\frac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/3}\cos^{-4}\varphi d\cos\varphi =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos^{-3}\varphi}{-3}\bigg|_{-\pi/4}^{\pi/3} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{\cos^3(\pi/3)} - \frac{1}{\cos^3(-\pi/4)}\right) = \frac{4-\sqrt{2}}{6}.$$

Завдання 3. Обчислити потрійний інтеграл.

Приклад 1. $\iiint_T (4xy+2z)dxdydz$;

T: $z = 4 - x$, $y = x$, $y = 3x$, $z = 0$.

Розв'язання. Будуємо область інтегрування та її проекцію на площину Оxy (рис. 5). Застосовуємо формулу

© В.І.Гуцул

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Нагадаємо, що нижня і верхня межі інтегрування у внутрішньому інтегралі по змінній z визначаються відповідно поверхнями, які обмежують область знизу і зверху. Межі інтегрування у двох інших інтегралах (по змінним x і y) визначаються як межі інтегрування для подвійного інтеграла по області G.

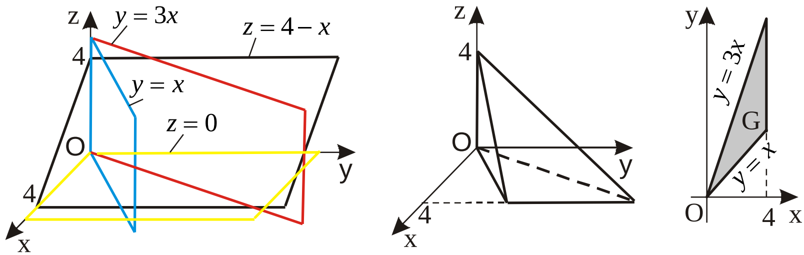


Рис. 5

Можемо записати

$$\iiint\limits_T (4xy+2z)dxdydz = \int\limits_0^4 dx \int\limits_x^{3x} dy \int\limits_0^{4-x} (4xy+2z)dz\,.$$

Обчислюємо внутрішній інтеграл по z (x і y вважаються сталими):

$$\int\limits_0^{4-x} (4xy+2z)dz = (4xyz+z^2)\Big|_0^{4-x} = 4xy(4-x)+(4-x)^2\,.$$

Обчислюємо інтеграл по y (x вважається сталою):

$$\int\limits_x^{3x}\left(4xy(4-x)+(4-x)^2\right)dy = \left(2x(4-x)y^2+(4-x)^2 y\right)\Big|_x^{3x} =$$

$$= 2x(4-x)\cdot 8x^2 + (4-x)^2\cdot 2x = 66x^3 - 16x^4 + 32x - 16x^2\,.$$

Обчислюємо внутрішній інтеграл:

© В.І.Гуцул

$$\int_0^4 (66x^3 - 16x^4 + 32x - 16x^2)dx =$$

$$= \left(\frac{33x^4}{2} - \frac{16x^5}{5} + 16x^2 - \frac{16x^3}{3} \right)\Bigg|_0^4 = 861{,}8(6) .$$

Приклад 2. $\iiint\limits_T (6xz + 3)dxdydz$;

T: $y = x^2$, $z = x^2 + y^2$, $y = 4$, $z = 0$.

Розв'язання. Будуємо область інтегрування та її проекцію на площину Oxy (рис. 6).

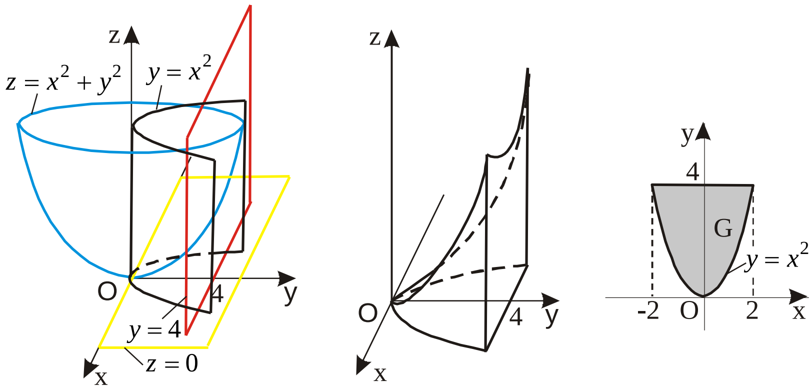


Рис. 6

Переходимо до трьохкратного інтеграла та розставляємо межі інтегрування:

$$\iiint\limits_T (6xz + 3)dxdydz = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} dy \int_0^{x^2+y^2} (6xz + 3)dz .$$

Обчислюємо внутрішні інтеграли:

$$\int_0^{x^2+y^2} (6xz + 3)dz = (3xz^2 + 3z)\Big|_0^{x^2+y^2} = 3x(x^2 + y^2)^2 + 3(x^2 + y^2) =$$

© В.І.Гуцул

$$=3x^5+6x^3y^2+3xy^4+3x^2+3y^2;$$

$$\int_{x^2}^{4}(3x^5+6x^3y^2+3xy^4+3x^2+3y^2)dy=$$

$$=\left(3x^5y+2x^3y^3+\frac{3}{5}xy^5+3x^2y+y^3\right)\Bigg|_{x^2}^{4}=$$

$$=12x^5+128x^3+614{,}4x+12x^2+64-3x^7-2x^9-0{,}6x^{11}-3x^4-x^6.$$

Межі інтегрування у зовнішньому інтегралі симетричні відносно нуля. При його обчисленні зручно використовувати наступну властивість визначеного інтеграла:

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\begin{cases}0, \text{ якщо } f(x) \text{ непарна,}\\ 2\int_{0}^{a}f(x), \text{ якщо } f(x) \text{ парна}\end{cases}.$$

Маємо:

$$\int_{-2}^{2}(12x^5+128x^3+614{,}4x+12x^2+64-3x^7-2x^9-0{,}6x^{11}-3x^4-x^6)dx=$$

$$=2\int_{0}^{2}(12x^2+64-3x^4-x^6)dx=2\left(4x^3+64x-\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7\right)\Bigg|_{0}^{2}=\frac{8576}{35}.$$

Завдання 4. Обчислити потрійний інтеграл, перейшовши до циліндричних або сферичних координат.

Приклад 1. $\iiint\limits_{T}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$;

Т: $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+y^2-z^2=0$, $z\ge 0$.

Розв'язання. Будуємо область інтегрування та її проекцію на площину Оху (рис. 7). Система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

визначає лінію перетину поверхонь (сфери і конічної поверхні). Для знаходження проекції цієї лінії на площину Оху виключаємо змінну z із записаної системи (додаємо рівняння):

$$2x^2 + 2y^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 9/2\,.$$

Отже, проекцією області інтегрування на площину Оху є круг, радіус якого дорівнює $3/\sqrt{2}$.

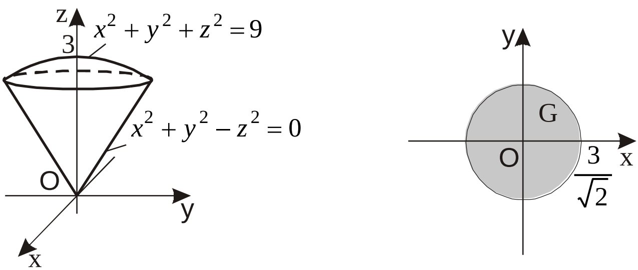


Рис. 7

Обчислюємо інтеграл, перейшовши до сферичних координат Запишемо рівняння заданої сфери та заданої конічної поверхні в сферичних координатах. Застосовуємо формули переходу:

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\theta.$$

Рівняння сфери:

$$(\rho\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\theta\sin\varphi)^2 + (\rho\cos\theta)^2 = 9,$$

$$\rho^2\sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \rho^2\cos^2\theta = 9, \rho^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 9, \rho = 3\,.$$

Рівняння конічної поверхні:

$$(\rho\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\theta\sin\varphi)^2 - (\rho\cos\theta)^2 = 0,$$

© В.І.Гуцул

$$\rho^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)=0, \cos 2\theta=0, 2\theta=\pi/2, \theta=\pi/4.$$

Перейдемо до сферичних координат у потрійному інтегралі за допомогою формули

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=$$

$$=\iiint_{V^*} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Маємо:

$$\iiint_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz=$$

$$=\iiint_{T^*}\sqrt{(\rho\sin\theta\cos\varphi)^2+(\rho\sin\theta\sin\varphi)^2+(\rho\cos\theta)^2}\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta=$$

$$=\iiint_{T^*}\rho^3\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Розставляємо межі інтегрування та інтегруємо:

$$\iiint_{T^*}\rho^3\sin\theta d\rho d\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/4}d\theta\int_0^3\rho^3\sin\theta d\rho;$$

$$\int_0^3\rho^3\sin\theta d\rho=\sin\theta\cdot\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^3=\frac{81}{4}\sin\theta;$$

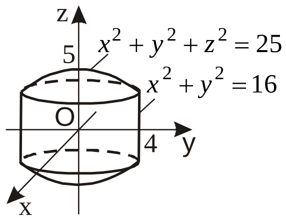
$$\int_0^{\pi/4}\frac{81}{4}\sin\theta d\theta=-\frac{81}{4}\cos\theta\Big|_0^{\pi/4}=\frac{81(2-\sqrt{2})}{8};$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{81(2-\sqrt{2})}{8}d\varphi=\frac{81(2-\sqrt{2})}{8}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{81(2-\sqrt{2})\pi}{4}.$$

Приклад 2. $\iiint_T (x^2+y^2)dxdydz;$

$$T: \ x^2+y^2+z^2=25, \ x^2+y^2=16.$$

Розв'язання. Будуємо область інтегрування та її проекцію на площину Oxy (рис. 8). Перейдемо до циліндричних координат.



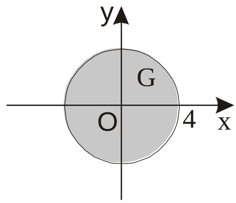


Рис. 8

Використовуючи формули переходу

$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi, \quad z=z,$$

запишемо рівняння заданих поверхонь (сфери та кругового циліндра) в циліндричних координатах:

$$(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2+z^2=25, z^2=25-\rho^2, z=\pm\sqrt{25-\rho^2};$$

$$(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=16, \rho=4.$$

До циліндричних координат у заданому інтегралі переходимо за формулою

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{V^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz.$$

Можемо записати

$$\iiint_T (x^2+y^2)dxdydz=\iiint_{T^*}\Big((\rho\sin\theta\cos\varphi)^2+(\rho\sin\theta\sin\varphi)^2\Big)\rho d\rho d\varphi dz=$$

$$=\iiint_{T^*}\rho^3 d\rho d\varphi dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4 d\rho\int_{-\sqrt{25-\rho 2}}^{\sqrt{25-\rho 2}}\rho^3 dz.$$

Інтегруємо:

$$\int\limits_{-\sqrt{25-\rho 2}}^{\sqrt{25-\rho 2}} \rho^3 dz = \rho^3 z\Big|_{-\sqrt{25-\rho 2}}^{\sqrt{25-\rho 2}} = 2\rho^3\sqrt{25-\rho^2};$$

$$\int\limits_0^4 2\rho^3\sqrt{25-\rho^2}\,d\rho = \int\limits_0^4 \rho^2\sqrt{25-\rho^2}\cdot 2\rho d\rho = -\int\limits_0^4 \rho^2\sqrt{25-\rho^2}\,d(25-\rho^2) =$$

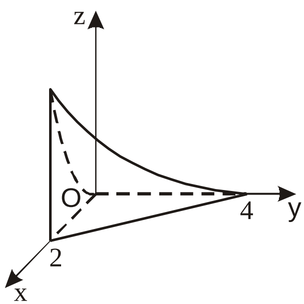
$$= \begin{vmatrix} 25-\rho^2 = t^2,\ \rho^2 = 25-t^2, \\ \rho = 0 \to t = 5,\ \rho = 4 \to t = 3 \end{vmatrix} = -\int\limits_5^3 (25-t^2)tdt = \int\limits_5^3 (t^3 - 25t)dt =$$

$$= \left(\frac{t^4}{4} - 25\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_5^3 = 64; \quad \int\limits_0^{2\pi} 64 d\varphi = 64\varphi\Big|_0^{2\pi} = 128\pi.$$

Завдання 5. Знайти об’єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями (застосувати подвійний інтеграл).

Приклад 1. $z = x^2,\ z = 0,\ y = 0,\ 2x + y = 4$.

Будуємо тіло, об'єм якого потрібно знайти та його проекцію на площину Оху (рис. 9).



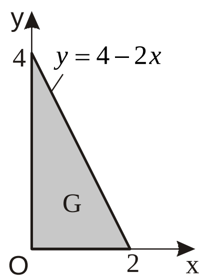


Рис. 9

Застосовуємо формулу

$$V = \iint\limits_G f(x, y)dxdy.$$

Нагадаємо, що підінтегральна функція визначається з рівняння поверхні $z = f(x, y)$, яка обмежує тіло зверху. Задане тіло обмежене зверху параболічним циліндром $z = x^2$, отже $f(x, y) = x^2$. Маємо:

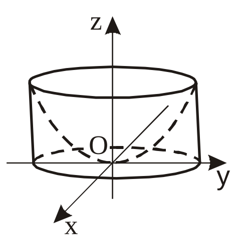
$$V = \iint\limits_G x^2 dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} x^2 dy ,$$

$$\int_0^{4-2x} x^2 dy = x^2 y \Big|_0^{4-2x} = x^2(4-2x) = 4x^2 - 2x^3,$$

$$V = \int_0^2 (4x^2 - 2x^3)dx = \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right)\Bigg|_0^2 = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3}.$$

Приклад 2. $z = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{3},\ z = 0,\ x^2 + y^2 = 9$.

Розв'язання. Будуємо тіло та його проекцію на площину Оxy (рис. 10).



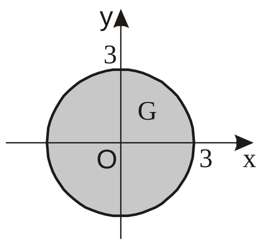


Рис. 10

У даному прикладі при обчислені подвійного інтеграла зручно перейти до полярної системи координат. Можемо записати:

$$V = \iint\limits_G \left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}\right) dxdy = \frac{1}{3}\iint\limits_{G^*} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho^3 d\rho,$$

$$\int_0^3 \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}\rho^4 \Big|_0^3 = \frac{81}{4},$$

© В.І.Гуцул

$$V=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\frac{81}{4}d\varphi=\frac{27}{4}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{27\pi}{2}.$$

Завдання 6. Знайти центр ваги однорідного тіла, яке обмежене вказаними поверхнями.

Приклад 1. $4z=-x^2-y^2, \quad z=-5.$

Розв'язання. Будуємо тіло, центр ваги якого потрібно знайти та його проекцію на площину Oxy (рис. 11).

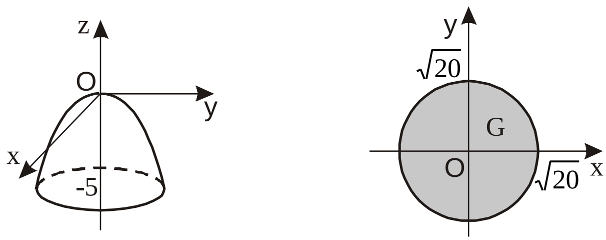


Рис. 11

Система рівнянь $4z=-x^2-y^2, z=-5$ визначає рівняння кола у просторі, по якому перетинаються задані параболоїд обертання і площина. Для знаходження проекції цієї лінії на площину Oxy виключаємо змінну z із вказаної системи:

$$-x^2-y^2=-20, x^2+y^2=20..$$

Отже, проекцією заданого тіла на площину Oxy є круг, радіус якого дорівнює $\sqrt{20}$.

Застосовуємо формули

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y}=\frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z}=\frac{M_{xy}}{m},$$

$$m=\iiint_T \gamma(x,y,z)dxdydz, \quad M_{yz}=\iiint_T x\gamma(x,y,z)dxdydz,$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_T y\gamma(x,y,z)dxdydz, \quad M_{xy} = \iiint\limits_T z\gamma(x,y,z)dxdydz \ ,$$

де m – маса тіла, M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} – статичні моменти тіла відносно відповідних площин. Так як тіло однорідне, то $\gamma(x,y,z)=1$. Крім того, задане тіло симетричне відносно вісі Oz, отже, $\bar{x}=\bar{y}=0.$ При обчисленні потрійних інтегралів зручно перейти до циліндричної системи координат. Рівняння заданого параболоїда обертання приймає вигляд $z=-0{,}25\rho^2$, а рівняння площини $z=-5$ не змінюється. Обчислюємо спочатку масу:

$$m = \iiint\limits_T dxdydz = \iiint\limits_{T^*} \rho d\varphi d\rho dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{20}} d\rho \int\limits_{-5}^{-0{,}25\rho^2} \rho dz,$$

$$\int\limits_{-5}^{-0{,}25\rho^2} \rho dz = \rho z\Big|_{-5}^{-0{,}25\rho^2} = \rho(-0{,}25\rho^2+5) = 5\rho - 0{,}25\rho^3,$$

$$\int\limits_0^{\sqrt{20}} (5\rho - 0{,}25\rho^3)d\rho = \left(\frac{5}{2}\rho^2 - \frac{0{,}25}{4}\rho^4\right)\Bigg|_0^{\sqrt{20}} = 25,$$

$$m = \int\limits_0^{2\pi} 25 d\varphi = 25\varphi\Big|_0^{2\pi} = 50\pi.$$

Обчислюємо статичний момент:

$$M_{xy} = \iiint\limits_T zdxdydz = \iiint\limits_{T^*} z\rho d\varphi d\rho dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{20}} d\rho \int\limits_{-5}^{-0{,}25\rho^2} z\rho dz,$$

$$\int\limits_{-5}^{-0{,}25\rho^2} z\rho dz = \frac{1}{2}\rho \cdot z^2\Big|_{-5}^{-0{,}25\rho^2} = \frac{1}{32}\rho^5 - \frac{25}{2}\rho,$$

$$\int_0^{\sqrt{20}}\left(\frac{1}{32}\rho^5-\frac{25}{2}\rho\right)d\rho=\left(\frac{1}{192}\rho^6-\frac{25}{4}\rho^2\right)\Bigg|_0^{\sqrt{20}}=\frac{125}{3}-125=-\frac{250}{3},$$

$$M_{xy}=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{250}{3}\right)d\varphi=-\frac{250}{3}\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=-\frac{500\pi}{3}.$$

Обчислюємо $\bar{z}$ (нагадаємо, що $\bar{x}=\bar{y}=0$):

$$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{m}=-\frac{500\pi}{3\cdot 50\pi}=-3,(3).$$

Приклад 2. $y=\sqrt{x^2+z^2}, \quad y=\sqrt{36-x^2-z^2}$.

Розв'язання. Маємо рівняння півконуса і півсфери. Будуємо тіло у просторі та його проекцію на площину Oxz (рис. 12).

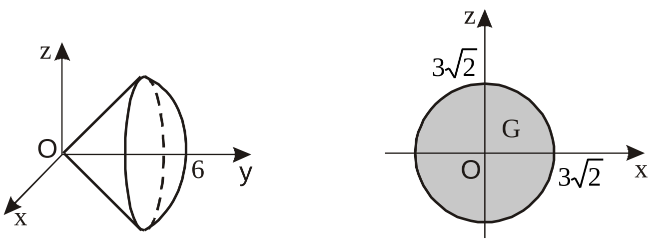


Рис. 12

Для визначення границі проекції виключаємо змінну y з системи рівнянь $y=\sqrt{x^2+z^2}$, $y=\sqrt{36-x^2-z^2}$. Маємо:

$$\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{36-x^2-z^2}, \quad x^2+z^2=36-x^2-z^2, \quad x^2+z^2=18.$$

Проекцією заданого тіла на площину Oxz є круг з радіусом $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

Координати центру ваги обчислюємо за формулами, які наведені у попередньому прикладі. Так як тіло однорідне, то $\gamma(x,y,z)=1$. Вісь Oy є віссю симетрії, отже, $\bar{x}=\bar{z}=0$. Обчислюємо масу (у подвійному інтегралі переходимо до полярних координат):

$$m=\iiint\limits_T dxdydz=\iint\limits_G dxdz\int\limits_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{36-x^2-z^2}}dy\ ,$$

$$\int\limits_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{36-x^2-z^2}}dy\ =y\Big|_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{36-x^2-z^2}}=\sqrt{36-x^2-z^2}-\sqrt{x^2+z^2}\,,$$

$$\iint\limits_G\left(\sqrt{36-x^2-z^2}-\sqrt{x^2+z^2}\right)dxdz=\iint\limits_{G^*}\left(\sqrt{36-\rho^2}-\rho\right)\rho d\varphi d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{3\sqrt{2}}\left(\sqrt{36-\rho^2}-\rho\right)\rho d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{3\sqrt{2}}\left(\rho\sqrt{36-\rho^2}-\rho^2\right)d\rho,$$

$$\int\limits_0^{3\sqrt{2}}\left(\rho\sqrt{36-\rho^2}-\rho^2\right)d\rho=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{3\sqrt{2}}\sqrt{36-\rho^2}\,d(36-\rho^2)-\int\limits_0^{3\sqrt{2}}\rho^2d\rho=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(36-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{3\sqrt{2}}-\frac{1}{3}\rho^3\Big|_0^{3\sqrt{2}}=36(2-\sqrt{2})\,,$$

$$m=\int\limits_0^{2\pi}36(2-\sqrt{2})d\varphi=36(2-\sqrt{2})\varphi\Big|_0^{2\pi}=72(2-\sqrt{2})\pi.$$

Обчислюємо статичний момент:

$$M_{xz}=\iiint\limits_T ydxdydz=\iint\limits_G dxdz\int\limits_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{36-x^2-z^2}}ydy,$$

$$\int\limits_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{36-x^2-z^2}}ydy=\frac{1}{2}y^2\Big|_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{36-x^2-z^2}}=18-x^2-z^2,$$

$$\iint\limits_G(18-x^2-z^2)dxdz=\iint\limits_{G^*}(18-\rho^2)d\rho d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{3\sqrt{2}}(18-\rho^2)\rho d\rho,$$

$$\int_0^{3\sqrt{2}}(18-\rho^2)\rho d\rho=\left(9\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right)\Bigg|_0^{3\sqrt{2}}=162-81=81,$$

$$M_{xz}=\int_0^{2\pi}81d\varphi=81\varphi\Big|_0^{2\pi}=162\pi.$$

Обчислюємо $\bar{y}$:

$$\bar{y}=\frac{M_{xz}}{m}=\frac{162\pi}{72(2-\sqrt{2})\pi}\approx 3{,}841.$$

Завдання **7**. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду.

Приклад 1. $\int\limits_K(y+1)dl,$ де К – дуга астроїди $x=4\cos^3 t,$ $y=4\sin^3 t;\quad 0\le t\le\pi/2$.

Розв'язання. Так як контур інтегрування заданий параметричними рівняннями $x=x(t),\ y=y(t),\ \alpha\le t\le\beta,$ то застосовуємо формулу

$$\int\limits_{AB}f(x,y)dl=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt\ .$$

Знайдемо спочатку диференціал дуги кривої:

$$dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\sqrt{((4\cos^3 t)')^2+((4\sin^3 t)')^2}\,dt=$$

$$=\sqrt{(-12\cos^2 t\sin t)^2+(12\sin^2 t\cos t)^2}\,dt=$$

$$=\sqrt{144\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}dt=12\cos t\sin t dt.$$

Обчислюємо інтеграл:

© В.І.Гуцул

$$\int_K (y+1)dl = \int_0^{\pi/2} 12(4\sin^3 t+1)\cos t\sin t dt = 48\int_0^{\pi/2}\sin^4 t d\sin t +$$

$$+12\int_0^{\pi/2}\sin t d\sin t = \left(\frac{48}{5}\sin^5 t + 6\sin^2 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{48}{5}+6 = 15{,}6.$$

Приклад 2. $\int_K \frac{y}{x^2+1}dl,$ де К – менша дуга кола $x^2+y^2=6x,$ яка відтинається прямою $y=-\sqrt{5}$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння заданої кривої:

$$(x^2-6x+9)+y^2=9, (x-3)^2+y^2=9.$$

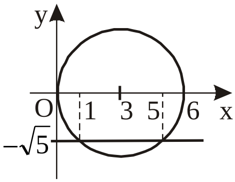


Рис. 13

Маємо рівняння кола з центром в точці (3;0) і радіусом $r=3$ (рис. 13). Знайдемо точки перетину кола і прямої:

$$x^2-6x+5=0, x_1=1, x_2=5.$$

Розв'язавши рівняння кола відносно *y*, отримуємо $y=-\sqrt{6x-x^2}$, $(1\le x\le 5)$. Контур інтегрування заданий рівнянням $y=y(x), a\le x\le b.$ Застосовуємо формулу

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx .$$

Обчислюємо диференціал дуги кривої:

$$dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}dx=\sqrt{1+\left(\frac{3-x}{\sqrt{6x-x^2}}\right)^2}dx=\frac{3dx}{\sqrt{6x-x^2}}.$$

Обчислюємо інтеграл:

© В.І.Гуцул

$$\int\limits_K \frac{y}{x^2+1}dl = -\int\limits_1^5 \frac{3\sqrt{6x-x^2}\,dx}{(x^2+1)\sqrt{6x-x^2}} = -3\int\limits_1^5 \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -3\operatorname{arctg} x\Big|_1^5 = -3\operatorname{arctg} 5 + \frac{3\pi}{4}.$$

Приклад 3. $\int\limits_K xdl,$ де К – дуга кардіоїди $\rho = 5(1+\cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le \pi.$

Розв'язання. Крива К задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$ в полярних координатах. Обчислюємо криволінійний інтеграл за формулою

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho(\varphi)^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi\,.$$

Знаходимо диференціал дуги кривої:

$$dl = \sqrt{\rho(\varphi)^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi = \sqrt{25(1+\cos\varphi)^2 + 25(-\sin\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= 5\sqrt{2(1+\cos\varphi)}d\varphi = 5\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 10\cos\frac{\varphi}{2}\,.$$

Перейдемо до визначеного інтегралу (замість x підставляємо $\rho(\varphi)\cos\varphi = 5(1+\cos\varphi)\cos\varphi$):

$$\int\limits_K xdl = \int\limits_0^{\pi} 50(1+\cos\varphi)\cos\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= 50\int\limits_0^{\pi}\cos\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi + 50\int\limits_0^{\pi}\cos^2\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi.$$

Кожен з інтегралів обчислюємо окремо. Нижче буде застосована тригонометрична формула

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)).$$

© В.І.Гуцул

Маємо:

$$\int_0^{\pi}\cos\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\cos\frac{3\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sin\frac{3\varphi}{2}+2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}+2\right)=\frac{2}{3},$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(\cos\frac{5\varphi}{2}+\cos\frac{3\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{10}\sin\frac{5\varphi}{2}+\frac{1}{6}\sin\frac{3\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=1+\frac{1}{10}-\frac{1}{6}=\frac{14}{15},$$

$$\int_K x\,dl=50\left(\frac{2}{3}+\frac{14}{15}\right)=80.$$

Приклад 4. $\int_K (x^2y+yz)\,dl,$ де К – дуга гвинтової лінії $x=4\cos t,$ $y=4\sin t,\;\; z=t,\;\; 0\le t\le\pi.$

Розв'язання. Дуга просторової кривої задана параметричними рівняннями $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t);\ \alpha\le t\le\beta$. Застосовуємо формулу

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,dl=\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

Дістаємо:

$$dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt=\sqrt{(-4\sin t)^2+(4\cos t)^2+1^2}\,dt=$$

$$=\sqrt{16(\sin^2 t+\cos^2 t)+1}\,dt=\sqrt{17}\,dt\,,$$

© В.І.Гуцул

$$\int\limits_K (x^2y + yz)dl = \int\limits_0^{\pi} (16\cos^2 t \cdot 4\sin t + 4\sin t \cdot t)\sqrt{17}dt =$$

$$= 64\sqrt{17}\int\limits_0^{\pi} \cos^2 t \sin t dt + 4\sqrt{17}\int\limits_0^{\pi} t \sin t dt \ ,$$

$$\int\limits_0^{\pi} \cos^2 t \sin t dt = -\int\limits_0^{\pi} \cos^2 t d\cos t = -\frac{1}{3}\cos^3 t\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3},$$

$$\int\limits_0^{\pi} t \sin t dt = \begin{vmatrix} u = t, dv = \sin t dt \\ du = dt, v = -\cos t \end{vmatrix} = -t\cos t\Big|_0^{\pi} + \sin t\Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$\int\limits_K (x^2y + yz)dl = 64\sqrt{17} \cdot \frac{2}{3} + 4\sqrt{17} \cdot \pi = \frac{4\sqrt{17}(32 + 3\pi)}{3} \ .$$

Завдання 8. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду.

Приклад 1. $\int\limits_{AB} xydx + (x+y)dy,$ де AB – дуга кривої $y = \sqrt[3]{x}$ від точки $A(8;2)$ до $B(1;1)$.

Розв'язання. Контур інтегрування AB задається рівнянням $y = y(x)$. Обчислюємо інтеграл за формулою

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b (P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\,y'(x))dx,$$

де *a*, *b* – абсциси точок A і B відповідно. Маємо:

$$\int\limits_{AB} xydx + (x+y)dy = \int\limits_8^1 \left(x\sqrt[3]{x} + (x + \sqrt[3]{x}) \cdot \frac{1}{3}x^{-2/3} \right)dx =$$

$$= \int\limits_8^1 \left(x^{4/3} + \frac{1}{3}x^{1/3} + \frac{1}{3}x^{-1/3} \right)dx = \left(\frac{3}{7}x^{7/3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{2/3} \right)\Bigg|_8^1 = -\frac{1671}{28}.$$

© В.І.Гуцул

Приклад 2. $\int\limits_{AB} 2xydx + x^2dy,$ де АВ – відрізок прямої від точки А(0;1) до В(3;7).

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої АВ. Використовуємо рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Маємо:

$$\frac{x-0}{3-0} = \frac{y-1}{7-1}, \quad \frac{x}{3} = \frac{y-1}{6}, \quad y = 2x+1.$$

Обчислюємо криволінійний інтеграл за формулою, яка наведена у попередньому прикладі:

$$\int\limits_{AB} 2xydx + x^2dy = \int\limits_0^3 (2x(2x+1) + x^2 \cdot 2)dx = \int\limits_0^3 (6x^2 + 2x)dx =$$

$$= (2x^3 + x^2)\Big|_0^3 = 54 + 9 = 63.$$

Приклад 3. $\int\limits_{AB} ydx + xdy,$ де АВ – дуга кола $x = 4\cos t,\ y = 4\sin t$ від $t = 0$ до $t = \pi/4.$

Розв'язання. Крива АВ задана параметричними рівняннями $x = x(t),\ y = y(t).$ Обчислюємо інтеграл за формулою

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t))dt,$$

де α, β – значення параметра *t* в точках А і В відповідно. Отримуємо:

© В.І.Гуцул

$$\int\limits_{AB} ydx + xdy = \int\limits_0^{\pi/4} (\sin t \cdot (-4\sin t) + 4\cos t \cdot \cos t)dt =$$

$$= 4\int\limits_0^{\pi/4} (\cos^2 t - \sin^2 t)dt = 4\int\limits_0^{\pi/4} \cos 2t dt = 4 \cdot \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/4} = 2.$$

Приклад 4. $\int\limits_{AB} y^2 zdx + z^2 xdy + x^2 ydz,$ де АВ – дуга кривої $x = t,$ $y = t^2,$ $z = t^3$ від $t = 0$ до $t = 1$.

Розв'язання. Просторова крива задана параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. Застосовуємо формулу (в точці А параметр *t* дорівнює $\alpha,$ а в точці В – *t* дорівнює β):

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_\alpha^\beta (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) +$$

$$+ Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt.$$

Дістаємо:

$$\int\limits_{AB} y^2 zdx + z^2 xdy + x^2 ydz = \int\limits_0^1 (t^4 t^3 \cdot 1 + t^6 t \cdot 2t + t^2 t^2 \cdot 3t^2)dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (t^7 + 2t^8 + 3t^6)dt = \left(\frac{1}{8}t^8 + \frac{2}{9}t^9 + \frac{3}{7}t^7 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{8} + \frac{2}{9} + \frac{3}{7} = \frac{391}{504}.$$

Завдання 9. Показати, що криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування, та обчислити його для заданих точок А(1;1), В(2;3) і С(2;1) по двом контурам інтегрування: а) по відрізку прямої АВ; б) по ламаній АСВ.

Приклад 1. $\int\limits_K (8xy + 6x)dx + (4x^2 + 15y^2)dy.$

Розв'язання. Умовою незалежності криволінійного інтеграла $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ від шляху інтегрування є наступна тотожна рівність

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}.$$

У нашому випадку маємо:

$$P(x,y) = 8xy + 6x,\; Q(x,y) = 4x^2 + 15y^2, \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 8x,\; \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 8x.$$

Умова виконана.

а) Використовуючи рівняння прямої, яка проходить через дві точки, записуємо рівняння прямої АВ:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1}, \quad y = 2x-1; \quad 1 \le x \le 2.$$

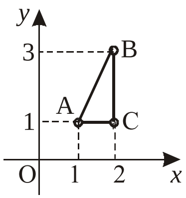


Рис. 14

Обчислюємо інтеграл по відрізку АВ:

$$\int\limits_{AB} (8xy + 6x)dx + (4x^2 + 15y^2)dy =$$

$$= \int\limits_1^2 (8x(2x-1) + 6x + (4x^2 + 15(2x-1)^2)\cdot 2)dx =$$

$$= \int\limits_1^2 (144x^2 - 122x + 30)dx = (48x^3 - 61x^2 + 30x)\Big|_1^2 = 48\cdot 7 - 61\cdot 3 + 30 = 183.$$

б) Очевидно, що $\int\limits_{ACB} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB}$. Відрізок АС описується співвідношеннями: $y = 1, 1 \le x \le 2; dy = 0$. Можемо записати:

$$\int\limits_{AC} (8xy + 6x)dx + (4x^2 + 15y^2)dy = \int\limits_1^2 (8x\cdot 1 + 6x)dx = 7x^2\Big|_1^2 = 21.$$

Відрізок СВ: $x = 2, 1 \le y \le 3; dx = 0.$ Дістаємо:

© В.І.Гуцул

$$\int\limits_{CB}(8xy+6x)dx+(4x^2+15y^2)dy=\int\limits_1^3(4\cdot 4+15y^2)dy=(16y+5y^3)\Big|_1^3=162,$$

$$\int\limits_{ACB}(8xy+6x)dx+(4x^2+15y^2)dy=21+162=183.$$

Завдання 10. Показати, що заданий вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом для деякої функції $U(x,y)$ та знайти цю функцію.

Приклад 1. $(4x^3y+2)dx+(x^4+6y)dy$.

Розв'язання. Вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом в деякий області, якщо в кожній точці цієї області виконується рівність

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}.$$

Перевіряємо виконання вказаної умови:

$$P(x,y)=4x^3y+2,\ Q(x,y)=x^4+6y,\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=4x^3,\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=4x^3.$$

Умова виконується. Функцію $U(x,y)$ шукаємо за формулою

$$U(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C\ ,$$

де x_0, y_0 – координати фіксованої точки (вибирається довільно), у який функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ та їхні частинні похідні неперервні. При інтегруванні у другому інтегралі по змінній y величина x вважається сталою. Нехай $x_0=y_0=0$. Отримуємо:

© В.І.Гуцул

$$U(x,y)=\int_0^x 2dx+\int_0^y (x^4+6y)dy+C=2x\Big|_0^x+(x^4y+3y^2)\Big|_0^y+C=$$

$$=2x+x^4y+3y^2+C\ .$$

Приклад 2. $\left(-\dfrac{6}{x^3}+ye^{xy}\right)dx+\left(xe^{xy}-\dfrac{2}{y^2}\right)dy$.

Розв'язання. Застосовуємо формули, яки наведені у попередньому прикладі. Перевіряємо умову:

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=e^{xy}+xye^{xy},\quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=e^{xy}+yxe^{xy}.$$

Умова виконана. Відмітимо, що брати початок координат у якості фіксованої точки не можна, так як у цій точці функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ терплять розрив (нулі у знаменниках). Нехай $x_0=y_0=1$. Дістаємо:

$$U(x,y)=\int_1^x\left(-\frac{6}{x^3}+e^x\right)dx+\left(xe^{xy}-\frac{2}{y^2}\right)dy+C=$$

$$=\left(\frac{3}{x^2}+e^x\right)\Bigg|_1^x+\left(e^{xy}+\frac{2}{y}\right)\Bigg|_1^y+C=\frac{3}{x^2}+e^x-3-e+e^{xy}+\frac{2}{y^y}-e^x-2+C=$$

$$=\frac{3}{x^2}+e^{xy}+\frac{2}{y^y}+C_1,$$

де C_1 – довільна стала ($C_1=-3-e-2+C$).